

# メッシュ切り替え内蔵時間積分による心臓弁の開閉解析

## Analysis of Open and Close Phase of Heart Valve by Changing Connectivity in Time Step

梅谷 信行<sup>1)</sup>, 久田 俊明<sup>2)</sup>

Nobuyuki UMETANI and Toshiaki HISADA

1)東京大学大学院 新領域創成科学研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷,7-3-1,umetani@sml.k.u-tokyo.ac.jp)

2)東京大学大学院 新領域創成科学研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷,7-3-1,hisada@sml.k.u-tokyo.ac.jp)

In this paper we propose a scheme of time integration including the change of analysis mesh. It is required to satisfy the equation of motion and mass conservation law on a changed mesh in the analysis of open and close of heart valve. But in some cases, the pressure oscillates shapely, when we solve a system in a changed mesh. We specify the cause of pressure oscillation and we get a smooth pressure history by improving the method of mapping values of the current mesh to new mesh. This method will be applied to the analysis of open-close phase of heart valve.

*Key Words : Fluid-structure interaction problems, time integration, mesh change, ALE finite element method, heart valve*

### 1. 諸言

流体構造連成問題についてALE流体構造強連成解析[1]を用いると安定に精度よく解析できる, 唯一流体領域の大変形によるメッシュの破綻という問題があるが, これはメッシュを切り替えるReconnectやRemeshの手法を使うことで解決できる. 従来のメッシュ切り替えの手法では, 切り替えられた後のメッシュで力学的平衡条件や, 質量保存則が満たされず, メッシュの変化が適切に解に反映されなかった. これは, 心臓弁の開閉解析など一部のメッシュの変化が解全体に大きな影響を与える場合には大きな問題となる. そこで, 本研究では各ステップの中でメッシュを切り替えながら, 力学的平衡条件や質量保存則を満足する解を探索する時間積分スキームを開発する. 時間積分中にメッシュを切り替えると力学的平衡をみだしながら解を求めることが可能であり, 流体中で弾性体が接触するような高度な問題に対しても有効である[2]. しかし, 流体の質量密度が高く時間刻みが小さい場合は, メッシュの切り替えにより, 時間積分内での質量保存則の整合性が崩れ圧力に振動が起きる場合がある. 本稿ではこの圧力振動のメカニズムを明らかにするとともに, メッシュ切り替えによる値のマッピング手法を改善することで, より精度の高いメッシュの変化を含む時間積分手法を提案する.

### 2. 時間積分中のメッシュの切り替え

今, 時間 $t$ における解から時間 $t+dt$ 後の解を求める場合について考える. 時間積分にNewmark法による陰の反復計算を適用するとすると,

$${}^{t+dt}u = {}^t u + \{\gamma {}^{t+dt}a + (1-\gamma) {}^t a\} dt \quad (1)$$

となる. ここで  $\gamma$  はNewmark法のパラメータである.  $\gamma=1$ の場合が後退オイラー法に対応し, 時間方向に1次精度,  $\gamma=0.5$ の場合が時間方向に2次精度の離散化となる. 式(1)を変形すると,  $t, t+dt$ における速度と加速度は次のような関係があることがわかる.

$${}^{t+dt}u - {}^t u - \gamma dt a = u^* \quad (2)$$

$$u^* = {}^t u + {}^t a(1-\gamma)dt \quad (3)$$

ここで  $u^*$  は時間 $t+(1-\gamma)dt$ における中間的な流速である.  $u^*$  の値は式(3)によって時刻  $t$  での流速と加速度から与えられる. 式(2)と運動方程式, 質量保存則を満たすのが時刻 $t+dt$ における解である.

ここで, メッシュのコネクティビティが時間積分中に変化する場合を考える. 時間 $t$ におけるメッシュを $O$ とし,  $O$ で離散化された速度を  $u_o$ , 加速度を  $a_o$  とする. また, 時間 $t+dt$ におけるメッシュを $N$ とし,  $N$ 上で離散化された速度を  $u_n$ , 加速度  $a_n$  とする, この場合, 式(3)は

$$u_o^* = {}^t u_o + {}^t a_o(1-\gamma)dt \quad (4)$$

一方, 式(2)は

$$u_n^* = {}^{t+dt}u_n - {}^{t+dt}a_n \gamma dt \quad (5)$$

となり, 異なるメッシュ $O, N$ で離散化された速度場  $u_o^*$ ,  $u_n^*$  は一般的には等しくすることができない. しかし, 一貫性のある時間積分を行うためには  $u_n^*$  はできるだけ  $u_o^*$  に近くなくてはならない. そこで, メッシュを切り替えたときには,  $u_n^*$  ができるだけ  $u_o^*$  に近くなるように,  $u_n$

と  $a_n$  の値をマッピングする．この方法については後に詳しく議論する．時間積分中のメッシュの切り替えは以下の手順に従う．

- 1．t の時間におけるメッシュと流速，加速度から，同じメッシュにおける  $t+dt$  の解を計算する．
- 2．メッシュの切り替えが必要なければ，時間を進め，step1へ進む，
- 3．メッシュが切り替え必要ならば，メッシュを切り替える．
- 4．切り替え前の流速と加速度から，切り替えた後の流速と加速度をマッピングにより求める．
- 5．Newmark法の増分計算を繰り返し替えし，収束した解が求まるとstep 2へ進む

### 圧力振動の発生原因

マッピングの方法が悪いとメッシュを切り替えた後に圧力振動を伴う場合がある．式(2)は  $t+dt$  秒後の速度と加速度が満たすべき式である．式(2)と運動方程式，質量保存の式が満たすのが， $t+dt$ での解である．式(2)の  $u^*$  にメッシュ間のマッピングの誤差による時間積分の誤差  $du^*$  が入り  $\bar{u}^*$  となったとする．マッピングした後に運動方程式，質量保存の式を満たすようにNewmark法の増分計算を進めることによって得られた解  $\bar{u}$ ， $\bar{a}$  とする

$$\bar{u}^* = u^* + du^* \quad (6)$$

$$= {}^{t+dt}\bar{u} - {}^{t+dt}\bar{a}\gamma dt \quad (7)$$

$$= ({}^{t+dt}u + d{}^{t+dt}u) - ({}^{t+dt}a + d{}^{t+dt}a)\gamma dt \quad (8)$$

式(8)から式(2)の両辺を引くと

$$du^* = d{}^{t+dt}u - d{}^{t+dt}a\gamma dt \quad (8)$$

式(8)の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot du^* = \nabla \cdot d{}^{t+dt}u - \nabla \cdot d{}^{t+dt}a\gamma dt \quad (9)$$

${}^{t+dt}\bar{u}$ ， ${}^{t+dt}u$  はそれぞれ質量保存則を満たすので，

$$\nabla \cdot d{}^{t+dt}u = \nabla \cdot {}^{t+dt}\bar{u} - \nabla \cdot {}^{t+dt}u = 0 \quad (10)$$

よって式(9)の右辺第一項は0であり，時間積分の誤差の発散に応じて加速度の発散が変化することが分かる．

$$\nabla \cdot d{}^{t+dt}a = -\frac{1}{\gamma dt} \nabla \cdot du^* \quad (11)$$

非圧縮性Newton流体のNavier-Stokes方程式

$$\rho {}^{t+dt}a + \rho {}^{t+dt}u \cdot (\nabla \otimes {}^{t+dt}u) = -\nabla {}^{t+dt}p + \mu \nabla^2 {}^{t+dt}u \quad (12)$$

において，加速度のみの変動成分に着目し，速度の変動成分を無視して，式(12)の変動成分のみに対する発散を計算すると，以下のような式が導かれる

$$\nabla^2 d{}^{t+dt}p \cong -\rho \nabla \cdot d{}^{t+dt}a = \frac{\rho}{\gamma dt} \nabla \cdot du^* \quad (13)$$

圧力振動の大きさは時間積分の誤差  $du^*$  と密度に比例し，時間刻み幅に反比例することがわかる．

実際に，後に示すベンチマーク問題を異なる時間刻み ( $dt=0.5ms$ ， $dt=0.25ms$ )で解析した場合における，薄肉梁の

端での圧力差の時間履歴を図1に示す．流速，加速度，圧力のマッピングには古いメッシュ0における内挿関数を用いて新しいメッシュNにおける節点上に補間した値を用いてマッピングを行った．時間刻みを半分にすると圧力振動の大きさが多くの場所で2倍近くなくなっていることがわかる．

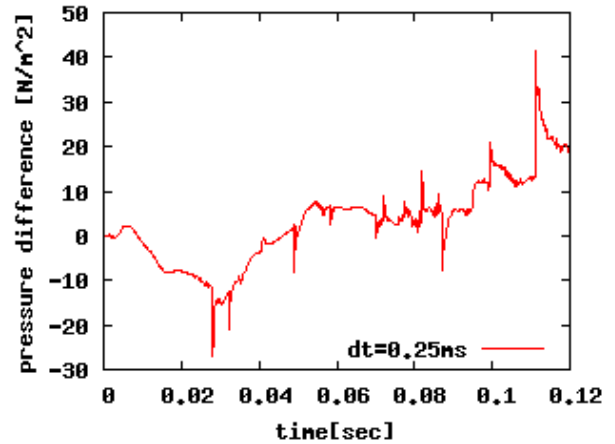
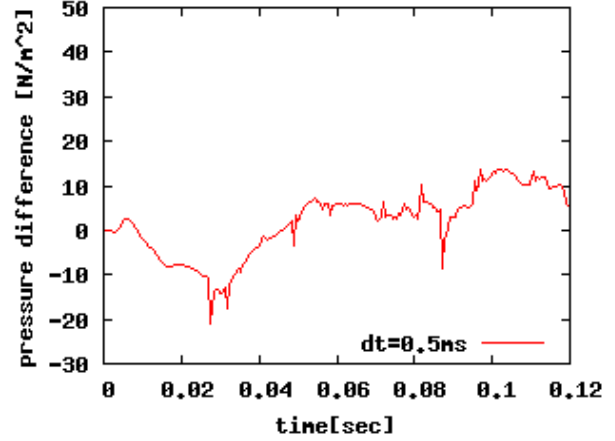


図1 Pressure Oscillation for  $dt = 0.5ms$  and  $dt = 0.25ms$

### 流速のマッピング方法

以下，圧力振動を除去しつつ，時間積分の誤差を最小にする方法について述べる．メッシュが0からNに変化した場合，流速，加速度，圧力はマッピングにより， ${}^{t+dt}u_o \rightarrow {}^{t+dt}\tilde{u}_n$ ， ${}^{t+dt}a_o \rightarrow {}^{t+dt}\tilde{a}_n$ ， ${}^{t+dt}p_o \rightarrow {}^{t+dt}\tilde{p}_n$  (14)

となったとする．ここでメッシュ間の値のマッピングによる，時間積分の誤差を評価するために，流速場を評価するノルムとして，式(15)のようなH1ノルムを導入する

$$\|u\|^2 = (u, u)_{H1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \otimes u : \nabla \otimes u) d\Omega \quad (15)$$

マッピングの誤差による時間積分の誤差のH1ノルムは

$$\|\delta u^*\| = \|\tilde{u}_n^* - u_o^*\| \quad (16)$$

とかける．前項の議論では，メッシュの変化における  $u^*$  の発散の変化は，加速度の発散の変化を引き起こし，圧力の変化につながる事がわかった．よって，

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_n^* = \nabla \cdot \mathbf{u}_o^* = -\gamma dt \nabla \cdot {}^{t+dt} \mathbf{a}_o \quad (17)$$

を  $\mathbf{u}_n^*$  が満たすようにすることでマッピングによる圧力の変化を防ぐことができる。式(17)を満たしながら式(16)を最小化する問題は結局のところ式(17)を流速発散値とする定常ストークス流体の問題を解いていることに他ならない。ラグランジュ未定乗数  $\lambda_n$  を導入して、この問題を新しいメッシュ  $\Omega$  上で弱形式離散化すると、

$$(\delta \mathbf{u}_n, (\tilde{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{u}_o^*))_{H_1} + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_n \cdot \nabla \lambda_n d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_n \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda_n \nabla \cdot \mathbf{u}_n^* d\Omega = -\gamma dt \int_{\Omega} \delta \lambda_n \nabla \cdot {}^{t+dt} \mathbf{a}_o \quad \forall \delta \lambda_n \quad (19)$$

となる。境界条件としては、流速境界上  $\Gamma_f$  と、構造との連成面  $\Gamma_{fsi}$  において固定境界条件を与える。

$$\mathbf{u}_n^* = \mathbf{u}_o^* \quad \text{on } \Gamma_{fsi} \text{ and } \Gamma_s$$

式(18)、式(19)を未知数  $\mathbf{u}_n^*$ 、 $\lambda_n$  について整理すると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^* \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

となる。ここで、新しいメッシュ  $\Omega$  における流速、加速度の補間関数  $N$ 、圧力の補間関数  $N^P$  とすると、 $\mathbf{ABFG}$  の具体的な成分は次のように書かれる。

$$A_{IJ} = \sum_e \int_{V_{en}} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial N_b}{\partial x_j} dV_{en} \quad (21)$$

$$B_{MJ} = \sum_e \int_{V_{en}} N_c^P \frac{\partial N_b}{\partial x_j} dV_{en} \quad (22)$$

$$F_I = \sum_e \int_{V_{en}} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_{oi}^*}{\partial x_i} dV_{en} \quad (23)$$

$$G_M = -\gamma dt \sum_e \int_{V_{en}} N_c^P \frac{\partial a_{ol}}{\partial x_i} dV_{en} \quad (24)$$

ここで添え字については流速の節点数  $NEN$ 、圧力節点数  $NEPN$ 、空間の次元数を  $NSD$  とすると

$$\begin{cases} I = (a-1) \cdot NSD + i \\ J = (b-1) \cdot NSD + j \\ M = c \end{cases} \begin{cases} 1 \leq a, b \leq NEN \\ 1 \leq c \leq NEPN \\ 1 \leq i, j \leq NSD \end{cases}$$

である。マッピングの手順は以下の通り

1. 変化する前のメッシュ  $\Omega_0$  において  $\mathbf{u}_o^*$  を計算する。
2. 式(20)を解くことにより、 $\mathbf{u}_o^*$  に最も近い新しいメッシュ  $\Omega$  上での速度  $\mathbf{u}_n^*$  を求める。
3. 古いメッシュ  $\Omega_0$  の補間関数を用いて、新しいメッシュ  $\Omega$  における  ${}^{t+dt} \tilde{\mathbf{a}}_n$ 、 ${}^{t+dt} \tilde{\mathbf{p}}_n$  の節点の値を求める。
4.  ${}^{t+dt} \tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n^* + \gamma dt {}^{t+dt} \tilde{\mathbf{a}}_n$  より、 ${}^{t+dt} \tilde{\mathbf{u}}_n$  を求める。

以上のマッピングの手続きを経た後、Newmarkの増分計算を繰り返すことにより、マッピングによって得られた値が運動方程式、質量保存則を満たすように修正する。

### 3. 問題設定

時間積分手法の妥当性を検証するために、薄い梁が流体の力を受けて撓む問題を2次元で解析した。この問題の解析を行うことにより、流速、加速度のマッピングにおいて、単純な補間による方法と本手法を比較することで、本手法の妥当性を検証する。

まず始めに本問題の模式図を図2に示す。本図に示される梁表面、及び上下の壁面A-Bでは滑りなしの条件を与える。右の壁面B-Bは流出口とし、応力ゼロの応力境界条件を与える。そして、左の面A-Aは流入口とし、速度と加速度を与える。速度については毎秒1.0mの割合で増加させるものとする。

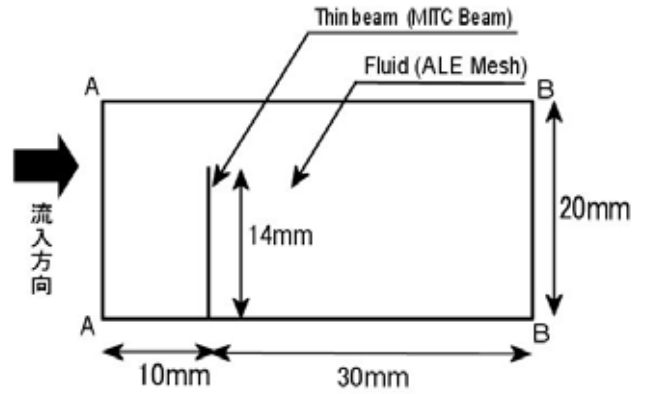


図2 Configuration of the problem

流体は質量密度  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、粘性係数  $1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  の Newton 流体とした。この値は常温での水の物性値にほぼ等しい。また、梁は Saint-Venant 体であるとし、物性値として質量密度  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ヤング率  $100 \text{ MPa}$ 、ポアソン比  $0.32$ 、梁の厚み  $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$  とした。

離散化については、流体要素として P1P1 補間による SUPG・PSPG 法[3]により安定化された ALE 流体要素を用いて離散化した。また梁要素として野口らによって開発された有限回転増分を考慮した 4 節点 MITC シェル要素[4]を2次元に縮退した 2 節点梁要素を用いて離散化を行った。また、Newmark 法による時間積分のパラメータは  $0.55$  とした。メッシュ制御はヤング率一定の弾性体制御を用いた。メッシュの切り替えについては、各タイムステップ毎に、Delaunay 条件が満たされるように、辺入れ替えのアルゴリズム[5]を用いてメッシュの切り替えを行った。また、要素の大きさにばらつきがないように、要素面積が平均の要素面積の 2 倍を超えないようにした。これは単純に面積が平均の 2 倍を超える要素について重心に新しい節点を配置することで実現した。

### 4. 解析結果

$dt=0.25 \text{ msec}$  とし、0 秒から  $0.12$  秒までの解析を行った。 $0.12$  秒後における解析メッシュの様子を図3に示す。梁が

移動した領域において流体メッシュの形状が変化していることがわかる。特に梁の先端付近ではメッシュの変化が著しい。メッシュの切り替えはほぼ毎ステップの中で行われた。図4に本手法を用いてマッピングした場合(M1)と古いメッシュ上の内挿関数を用いてマッピングを行った場合(M2)の梁先端における表裏の圧力差の時間履歴を示す。M2による解は図1の下図と同一である。本手法を用いた場合は滑らかな圧力履歴が得られるのに対して、既述のように単純な補間によってマッピングを行った場合には圧力の振動が発生していることがわかる。M2において大きな圧力の変化が生じている時間では梁の境界層の中でメッシュの切り替えが行われた時間である。

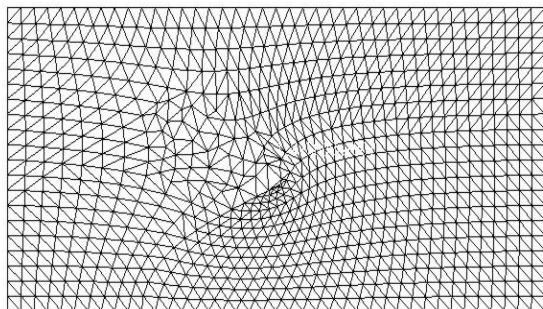
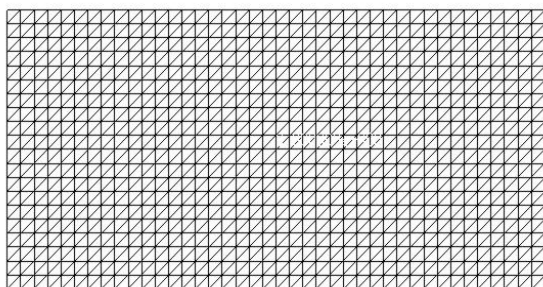


図3 Fluid mesh at t=0.0 and t=0.12

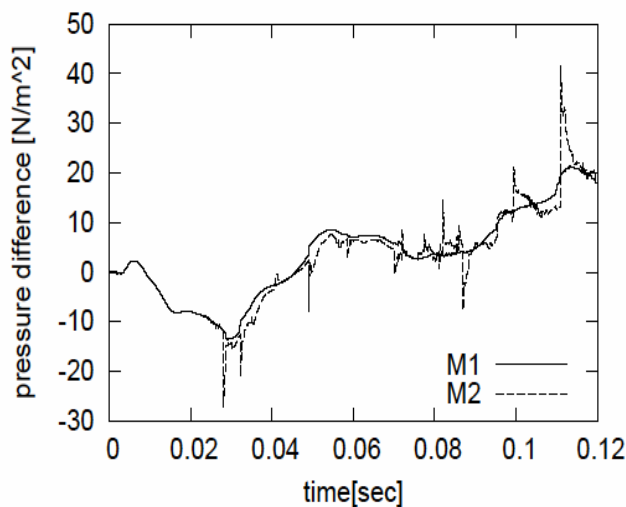


図4 Pressure difference

## 5. 今後の課題

本手法においてもさらにdtを小さくすると圧力に振動が生じてしまう。これは加速度の発散以外の変動も無視できないからであると考えている。しかし、今後はこの手法を3次元へ拡張し、心臓弁の解析への応用を目指す。

謝辞：本研究は東京大学・鷲尾巧氏，澤田有弘氏との議論によるところが大変多く，ここに深く感謝の意を表します。

### 参考文献

- 1)Q.Zhang and T.Hisada,: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg **190**(2001)6341-6357
- 2)梅谷信行,久田俊明“ 流体領域の分離融合に対応した時間積分におけるメッシュ切り替え連成解析アルゴリズム ” JSME 計算工学講演会講演論文集 p417-418,(2005)
- 3)T.E.Tezduyar,:to appear in Encyclopedia of Comput. Mech., John Wiley & Sons, Ltd.(2004)
- 4)H.Noguchi and T.Hisada: Comput. Struct. **47**-4/5(1993) 699-710
- 5)Jonathan Richard Shewchuk : Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation