

非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する MINI 要素と安定化有限要素法に関する検討

Investigation on relationship between MINI element and stabilized FEM for incompressible Navier-Stokes equations

梅谷 信行, 東京大学, 東京都文京区本郷 7-3-1, umetani@sml.k.u-tokyo.ac.jp
Nobuyuki UMETANI, Tokyo University, Hongo 7-3-1 Bunkyo-ku Tokyo

MINI element has inherently stabilizing effects on steady advection-diffusion flows and Stokes flows. In this paper, we suggest that stabilization of MINI element, in which the velocity field is approximated by the bubble element and pressure field is approximated by linear element, was strengthened by adding P1P1 element matrix to that of MINI element

非圧縮性流体解析における SUPG/PSPG/LSIC 安定化手法は現在では広く知られる方法となったが, 提案された当初は経験則に依るところが多く数学的背景には欠けるものであった. 特に当該方法で導入される安定化係数の決定には議論が残されている. しかしそれと時を同じくして気泡関数要素を流体解析へ適用する研究が進み, その結果両手法の類似性が証明されるに至った. 具体的には線形同次補間(P1P1)要素によって離散化された SUPG/PSPG/LSIC 安定化項が, 特定の条件下において MINI(P1P1+bubble)要素の気泡関数自由度を静的に縮約して得られる項と等価になることが証明された[1]. この報告を受け現在では両手法間で活発かつ興味深い理論展開が行われている. ここで重要となる点は, まず安定化有限要素法で導入される安定化係数がより効率的に決定され得ることと, 逆に MINI 要素が本来有する安定化効果が更に強化され得ることである. 後者に対する検討として山田の P 型正規化気泡関数[2]や Simo らの S 型法[3]が挙げられるがこれら Bubnov-Galerkin 法に準ずる適合型気泡関数法には安定化限界があり, Petrov-Galerkin 法に準ずる安定化有限要素法と匹敵するまでの効果を持たせる事ができない. これを打破する試みとしては, 重み関数に非適合型の気泡関数を用いた奥村らの手法[4]や, 重心点のみに粘性を付加する松本らの手法[5]が挙げられる. これらを受け本稿では, 非適合型の気泡関数を用いることなく MINI 要素の安定化力を補強できる手法として, MINI 要素と P1P1 要素による離散化式を個別に用意しそれらをマージすることで適合型要素のまま一種の PG 安定化手法を再現する方法論を提案し検討する.

まず, 最初に MINI 要素の離散化を示す.

非定常非圧縮 Navier-Stokes 方程式は次のように書ける

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla \otimes u = -\nabla p + \mu \Delta u + f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

ここでは簡単のため, 粘性項に応力発散形式ではなく, ラプラシアン形式を用いる. これを弱形式離散化すると次のように変形される

$$\int_{\Omega} \delta u \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u \rho (c \cdot \nabla) u d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta u p d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla \delta u \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u f d\Omega \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla u d\Omega = 0 \quad (4)$$

ここで, この弱形式離散化のマトリックス表示を行う.

$$M \cdot \dot{U} + \Lambda \cdot U + K \cdot U - G^T \cdot P = F \quad (5)$$

$$G \cdot U = 0 \quad (6)$$

M, Λ, K, F, G をそれぞれ 質力マトリクス 移流マトリクス, 粘性逸散マトリクス, 外力ベクトル, 発散マトリクスである. これらを構成するための要素剛性の成分を以下に示す.

$$M_{IJ} = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_{ij} N_a \rho N_b d\Omega_e \quad (7)$$

$$\Lambda_{IJ} = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_{ij} N_a \rho N_k u_m^k \frac{\partial N_b}{\partial x_m} d\Omega_e \quad (8)$$

$$K_{IJ} = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_{ij} \mu \frac{\partial N_a}{\partial x_m} \frac{\partial N_b}{\partial x_m} d\Omega_e \quad (9)$$

$$F_I = \sum_e \int_{\Omega_e} N_a \rho g_i d\Omega_e \quad (10)$$

$$G_{MJ} = \sum_e \int_{\Omega_e} N_c^p \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega_e \quad (11)$$

N は流速の内挿関数, N^p は圧力の内挿関数を表す. μ は粘性係数, ρ は密度を表す. ここで成分添え字は以下を満たす.

$$\begin{cases} I = (a-1) \cdot NSD + i \\ J = (b-1) \cdot NSD + j \\ M = c \end{cases} \begin{cases} a, b, k = 1, \dots, NEVN \\ c, d = 1, \dots, NEPN \\ i, j, m = 1, \dots, NSD \end{cases}$$

ここで NEVN は 1 要素内の速度節点数, NEPN は 1 要素内の圧力節点数, NSD は空間の次元数を表す
このマトリクス方程式をさらに簡略化して書くと次のようになる。

$$M^f \dot{\phi} + C^f \phi = F^f \quad (12)$$

$$M^f = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^f = \begin{bmatrix} \Lambda + K & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix}, \quad F^f = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

次にこの非線形な運動方程式に対し, Newmark 法による時間積分手法を適用する。係数マトリクスには割線法を用いる Newmark 法では速度と加速度の間に次のような関係式が成り立つと仮定する

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \Delta t \left\{ \gamma {}^{t+\Delta t}\dot{U} + (1-\gamma) {}^t\dot{U} \right\} \quad (13)$$

ここで γ は Newmark 法のパラメータである。加速度を原始関数として用いると, 式(13)の速度と加速度の関係を満たすためには時間増分反復において,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1 回目の反復の場合} \\ (M^f + C^f \gamma \Delta t) \Delta \dot{\phi}^1 = {}^{t+\Delta t}F^f - M^f {}^t\dot{\phi} - C^f ({}^t\phi - \Delta t {}^t\dot{\phi}) \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\dot{\phi}^1 = {}^t\dot{\phi} + \Delta \dot{\phi}^1 \quad \phi^1 = {}^t\phi + \Delta t {}^t\dot{\phi} + \gamma \Delta t \Delta \dot{\phi}^1 \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{k 回目の反復の場合} \\ (M^f + C^f \gamma \Delta t) \Delta \dot{\phi}^k = {}^{t+\Delta t}F^f - M^f \dot{\phi}^{k-1} - C^f \phi^{k-1} \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\dot{\phi}^k = \dot{\phi}^{k-1} + \Delta \dot{\phi}^k \quad \phi^k = \phi^{k-1} + \gamma \Delta t \Delta \dot{\phi}^k \quad (17)$$

として増分を計算すればよい。ここで, 内力ベクトル Q を

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1 回目の反復の場合} \\ Q^f = M^f {}^t\dot{\phi} + C^f ({}^t\phi + \Delta t \dot{\phi}) \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{k 回目の反復の場合} \\ Q^f = M^f \dot{\phi}^{k-1} + C^f \phi^{k-1} \end{array} \right. \quad (19)$$

とおくと

$$(M^f + C^f \gamma \Delta t) \Delta \dot{\phi} = A \Delta \dot{\phi} = F^f - Q^f \quad (20)$$

のように書ける。ここで, このマトリクス方程式に対する 2 次元 MINI 要素での離散化を考える。MINI 要素の補間の式は次のように書ける。

$$N_c = L_c - l_c N_g \quad (c = 1 \dots 3) \quad (21)$$

$$N_g = \alpha L_1 L_2 L_3 \quad (\alpha = 1/l_1 l_2 l_3) \quad (22)$$

$$N_c^p = L_c \quad (23)$$

N_c, N_g, N_c^p はそれぞれ, 流速の corner 節点での補間関数, 流速の重心自由度に関する補間関数, 圧力の補間関数を表す。L は線形補間の内挿関数, (l_1, l_2, l_3) は重心点の面積座標である。

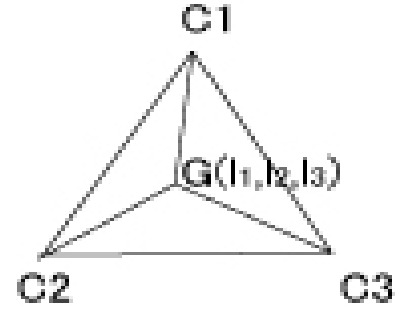


図 1 . MINI 要素を重心節点

この式(20)について, 重心点での流速自由度と corner 自由度とを明示的に分離して表記すると

$$\begin{pmatrix} A_{gg} & A_{gc} \\ A_{cg} & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_g \\ \Delta \dot{\phi}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g^f \\ F_c^f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_g^f \\ Q_c^f \end{Bmatrix} \quad (24)$$

左辺第 1 項に対しブロック LU 分解を行うと

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{cg} A_{gg}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{gg} & A_{gc} \\ 0 & S_{cc} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_g \\ \Delta \dot{\phi}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g^f \\ F_c^f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_g^f \\ Q_c^f \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで

$$S_{cc} = A_{cc} - A_{cg} A_{gg}^{-1} A_{gc} \quad (26)$$

は A における Agg のシュアーコンプリメントである。式(25)の左から左辺第 1 項の係数行列の逆行列である

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{cg} A_{gg}^{-1} & I \end{pmatrix} \quad (27)$$

をかけることによって

$$\begin{pmatrix} A_{gg} & A_{gc} \\ 0 & S_{cc} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_g \\ \Delta \dot{\phi}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g^f \\ F_c^f - A_{cg} A_{gg}^{-1} F_g^f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_g^f \\ Q_c^f - A_{cg} A_{gg}^{-1} Q_g^f \end{Bmatrix} \quad (28)$$

と式変形される。ここで

$$\tilde{M}^f = M_{cc}^f - A_{cg} A_{gg}^{-1} M_{gc}^f \quad (29)$$

$$\tilde{C}^f = C_{cc}^f - A_{cg} A_{gg}^{-1} C_{gc}^f \quad (30)$$

$$\tilde{F}^f = F_{cc}^f - A_{cg} A_{gg}^{-1} F_{gc}^f \quad (31)$$

とおくと, $S_{cc} = \tilde{M}^f + \tilde{C}^f \gamma \Delta t$ であるので corner 節点の自由度に関する方程式が得られる

$$(\tilde{M}^f + \tilde{C}^f \gamma \Delta t) \Delta \dot{\phi}_c = \tilde{F}^f - Q_c^f + A_{cg} A_{gg}^{-1} Q_g^f \quad (32)$$

式(32)が MINI 要素を用いて Newmark 法での時間積分による, 非定常非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解いたときの corner 節点のみに対する方程式である。内力ベクトル Q には重心点での流速の影響がまだ残されている。

ここで, MINI 要素の corner 節点の自由度に関する式において内力ベクトル Q に対しても, 重心自由度の影響を排除することを考える。Newmark 法の増分において重心自由度については 0 からの増分を計算するとする。つまり,

$$\begin{pmatrix} A_{gg} & A_{gc} \\ A_{cg} & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_g \\ \Delta \dot{\phi}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g^f \\ F_c^f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_g'^f \\ Q_c'^f \end{Bmatrix} \quad (33)$$

1 回目の反復の場合

$$\begin{Bmatrix} Q_g'^f \\ Q_c'^f \end{Bmatrix} = M^f \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_c \end{Bmatrix} + C^f \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^t\phi_c - \Delta t {}^t\dot{\phi}_c \end{Bmatrix} \quad (34)$$

k 回目の反復の場合

$$\begin{Bmatrix} Q_g'^f \\ Q_c'^f \end{Bmatrix} = M^f \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^t\dot{\phi}_c^{k-1} \end{Bmatrix} + C^f \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^t\phi_c^{k-1} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

上の方程式も同様に重心自由度を消去して comer 節点のみの自由度に関する式をたてると

$$(\tilde{M}^f + \tilde{C}^f \lambda \Delta t) \Delta \dot{\phi}_c = \tilde{F}^f - \tilde{Q}'^f \quad (36)$$

ただし、内力ベクトル \tilde{Q}'^f については

1 回目の反復の場合

$$\tilde{Q}'^f = \tilde{M}^f {}^t\dot{\phi}_c + \tilde{C}^f ({}^t\phi_c + \Delta t \dot{\phi}_c) \quad (37)$$

k 回目の反復の場合

$$\tilde{Q}'^f = \tilde{M}^f \dot{\phi}_c^{k-1} + \tilde{C}^f \phi_c^{k-1} \quad (38)$$

と書ける。これは、comer 節点の自由度に対して、独立して Newmark 法によるマトリックス方程式を立てたことにほかならない。つまり上の式は

$$\tilde{M}^f \dot{\phi}_c + \tilde{C}^f \phi_c = \tilde{F}^f \quad (39)$$

を解いていることと同一である。以上の議論から重心自由度について 0 からの増分をとると、重心自由度を消去することができ、comer 節点について独立したマトリックス方程式が立てられることがわかった。

次に、このマトリックス方程式について解析的な積分を実行し、成分を具体的に計算することで、安定化有限要素法との比較を行う。以下の面積座標の積分公式を用いて解析的に積分を行った。

$$\int_{\Omega_e} L^i L^j L^k d\Omega_e = \frac{2!i!j!k!A_e}{(2+i+j+k)!} \quad (40)$$

A_e は要素の面積である。また、剛性行列の移流項には重心点での

流速が含まれているが、以下のように重心点での流速が comer 節点の流速の補間によって表されると仮定して、剛性行列における重心自由度を消去する

$$u_g = l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 \quad (41)$$

また簡単のため、comer 節点から線形補間される流速場について、要素内非圧縮性が成り立つと仮定するつまり、

$$\nabla \cdot (L_k u^k) = \frac{\partial L_k}{\partial x_m} u_m^k = 0 \quad (42)$$

が成り立つとする。これらを用いて、 $\tilde{M}^f, \tilde{C}^f, \tilde{F}^f$ を計算する。

ここで $M^{PIPI}, K^{PIPI}, \Lambda^{PIPI}, G^{PIPI}$ は流速と圧力の補間に線形

補間に用いた PIP1 補間の行列である。

$$\begin{aligned} \tilde{M}^f &= M_{cc}^f - (M_{cg}^f + C_{cg}^f \gamma \Delta t) (M_{gg}^f + C_{gg}^f \gamma \Delta t)^{-1} M_{gc}^f \\ &= \begin{pmatrix} M^{PIPI} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^{shur-u} & 0 \\ M^{shur-p} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^f &= C_{cc}^f - (M_{cg}^f + C_{cg}^f \gamma \Delta t) (M_{gg}^f + C_{gg}^f \gamma \Delta t)^{-1} C_{gc}^f \\ &= \begin{pmatrix} K^{PIPI} + \Lambda^{PIPI} & -G^{PIPI T} \\ G^{PIPI} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda^{shur-u} & G^{shur-u} \\ \Lambda^{shur-p} & G^{shur-p} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^f &= (M_{cg}^f + C_{cg}^f \gamma \Delta t) (M_{gg}^f + C_{gg}^f \gamma \Delta t)^{-1} F_c \\ &= \begin{Bmatrix} F^{PIPI} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F^{shur-u} \\ F^{shur-p} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

$\tilde{M}^f, \tilde{C}^f, \tilde{F}^f$ は PIP1 補間で得られる項に新たに項を足し合わせた形をしている。以下にその成分を示す。

$$M_{IJ}^{shur-u} = \delta_{ij} A_e \tau \rho \left(\frac{1}{3} \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m - \frac{1}{\gamma \Delta t} \frac{1}{9} \right) \quad (46)$$

$$\Lambda_{IJ}^{shur-u} = \delta_{ij} A_e \tau \rho \left(\frac{\partial L_a}{\partial x_m} \frac{\partial L_b}{\partial x_n} \bar{u}_m \bar{u}_n - \frac{1}{\gamma \Delta t} \frac{1}{3} \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m \right) \quad (47)$$

$$G_{IN}^{shur-u} = A_e \tau \left(\frac{\partial L_d}{\partial x_i} \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m + \frac{1}{\gamma \Delta t} \frac{1}{3} \frac{\partial L_d}{\partial x_i} \right) \quad (48)$$

$$F_I^{shur-u} = A_e \tau \left(\frac{1}{3} \rho g_i \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m - \frac{1}{\gamma \Delta t} \frac{1}{3} \rho g_i \right) \quad (49)$$

$$M_{MJ}^{shur-p} = A_e \tau \frac{1}{3} \frac{\partial L_c}{\partial x_j} \quad (50)$$

$$\Lambda_{MJ}^{shur-p} = A_e \tau \frac{\partial L_c}{\partial x_j} \frac{\partial L_b}{\partial x_m} \bar{u}_m \quad (51)$$

$$G_{MN}^{shur-p} = A_e \tau \frac{1}{\rho} \frac{\partial L_c}{\partial x_m} \frac{\partial L_d}{\partial x_m} \quad (52)$$

$$F_M^{shur-p} = A_e \tau \frac{\partial L_c}{\partial x_m} g_m \quad (53)$$

$$\bar{u}_m = \frac{1}{3} (u_m^1 + u_m^2 + u_m^3) \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\rho \left(\int_{V_e} N_g dV_e \right)^2 r \Delta t}{\left(\mu \int_{V_e} \nabla N_g \cdot \nabla N_g dV_e \gamma \Delta t + \rho \int_{V_e} N_g^2 dV_e \right) A_e} \\ &= \frac{1}{20 \left(\frac{\nu}{h_e^2} + \frac{1}{14} \frac{1}{\gamma \Delta t} \right)} \end{aligned} \quad (55)$$

化に近い安定化とラプラスアンによる流速安定化がなされることがわかった。

以上の議論から得られた MINI 要素の重心自由度を消去した方程式, MINI 要素の重心自由度を消去した行列に PIP1 補間によって得られる行列をマージした方程式について, Cavity 内流れの計算を行うことによって, どの程度流速の安定化がなされるのかを調べた。

図 2 のように, 20×20 の不均等なメッシュ分割で解析を行った。流速安定化の様子を調べるために, 移流が支配的な $Re = 10000$ の場合について計算を行った。また時刻 $t = 0.005$ については,

図 3,4,5 に水平方向流速コンターを示す。MINI 要素の重心節点での流速を消去した方程式の流速は大きく振動していることがわかる。また, MINI 要素の重心節点での流速を消去したマトリクス方程式に PIP1 補間によって得られるマトリクス方程式をマージした解の流速はそのような解の振動は見られなかった。PIP1 補間の行列を加えることによって流速の安定化が図られたことがわかる。

h_e は要素の代表高さである。また μ は動粘性係数である。この

β は気泡関数の安定化パラメータとよばれ, 安定化有限要素法の安定化パラメータに相当する値である。

ここで, 得られたマトリクス方程式について考察を加える。

$M_{IJ}^{shur-p}, \Lambda_{IJ}^{shur-p}, G_{IJ}^{shur-p}, F_I^{shur-p}$ については PSPG 安定化と同一のマトリクス方程式が得られた。

また, $M_{IJ}^{shur-u}, \Lambda_{IJ}^{shur-u}, G_{IJ}^{shur-u}, F_I^{shur-u}$ について考察を加える。Newmark 法での剛性行列の流速に関する対角項については,

$$M_{IJ}^{shur-u} + \Lambda_{IJ}^{shur-u} \gamma \Delta t = \delta_{ij} A_e \tau \beta \left\{ \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \frac{\partial L_b}{\partial x_n} \bar{u}_m \bar{u}_n \gamma \Delta t + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m - \frac{\partial L_b}{\partial x_m} \bar{u}_m \right) - \frac{1}{9} \right\} \quad (56)$$

となる。第 1 項については正定値対称な行列であるが, 第 2 項は反対称な行列となる。第 3 項については成分がすべて負の同じ数である行列となる。第 2 項, 第 3 項が不安定性の原因となっていると考えられる。

そこで, 運動方程式に PIP1 補間によるマトリクス方程式に

$\frac{\tau}{\gamma \Delta t}$ を掛けたものを加えてみる。すると,

$$M_{IJ}^{shur-u+PIP1} = \delta_{ij} A_e \tau \left[\frac{1}{3} \rho \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m + \frac{1}{\gamma \Delta t} \rho \left\{ \frac{1}{12} (1 + \delta_{ab}) - \frac{1}{9} \right\} \right] \quad (57)$$

$$\Lambda_{IJ}^{shur-u+PIP1} = \delta_{ij} A_e \tau \left\{ \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \frac{\partial L_b}{\partial x_n} \bar{u}_m \bar{u}_n + \frac{\mu}{\gamma \Delta t} \frac{\partial L_a}{\partial x_k} \frac{\partial L_b}{\partial x_k} + \frac{1}{\gamma \Delta t} \frac{1}{3} \rho \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \left(\bar{u}_m - \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_b}{4} \right) \right\} \quad (58)$$

$$G_{IN}^{shur-u+PIP1} = A_e \tau \frac{\partial L_a}{\partial x_i} \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m \quad (59)$$

$$F_I^{shur-u+PIP1} = A_e \tau \frac{1}{3} \rho g_i \frac{\partial L_a}{\partial x_m} \bar{u}_m \quad (60)$$

$M_{IJ}^{shur-u+PIP1}$ の第二項は対角化した場合 0 となり,

$\Lambda_{IJ}^{shur-u+PIP1}$ の第三項は 3 つの corner 節点の流速の平均値から 3 つの corner 節点の流速と 3 つの corner 節点の流速のうち一つの平均値を引いたものになっており, ほぼ相殺されと考えられる。

$\Lambda_{IJ}^{shur-u+PIP1}$ の第二項にラプラスアンに相当する項が入っていることも注目すべき点である。 $M_{IJ}^{shur-u+PIP1}, \Lambda_{IJ}^{shur-u+PIP1}$

$G_{IJ}^{shur-u+PIP1}, F_I^{shur-u+PIP1}$ の第 1 項は SUPG 安定化と酷似した行列となる。つまり, 重心自由度を消去したことで得られる行列に PIP1 補間で得られる行列をマージすることで SUPG 安定

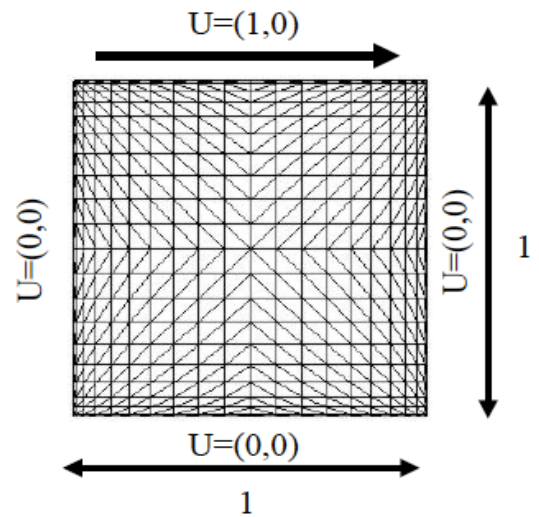


図 2 . キャビティ問題

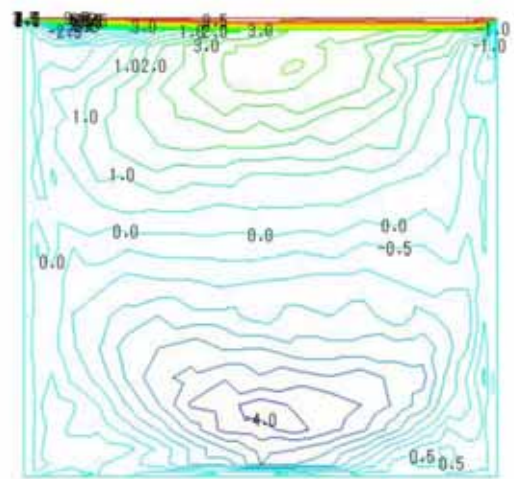


図 3 . 重心自由度消去した解の水平方向流速コンター

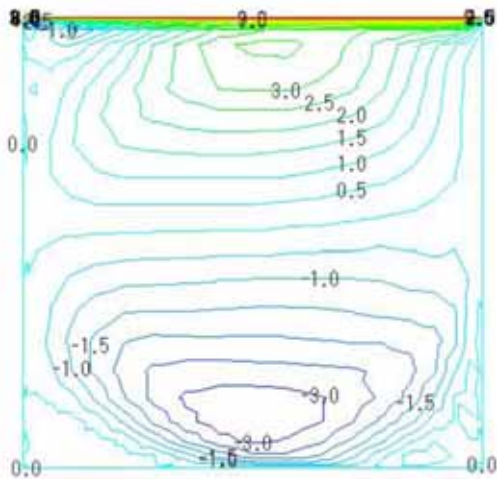


図 4 . MINI 重心自由度消去 + PIP1 の解の水平方向流速コンター

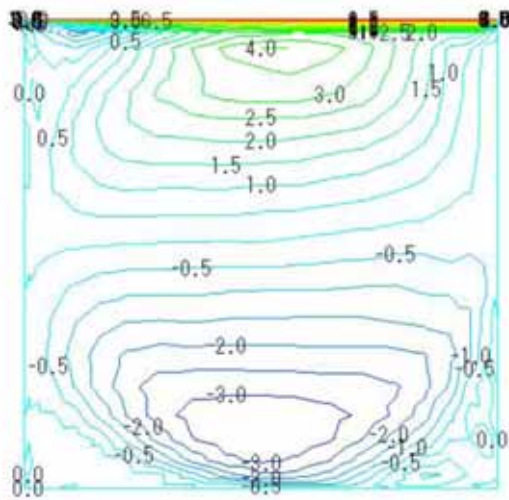


図 5 . PIP1+SUPG , PSPG 安定化の解の水平方向流速コンター

次に , MINI 要素の重心自由度を消去したものに PIP1 をマージしたマトリクス方程式には余分な人工粘性を含まないかを調べた . 具体的には , PIP1 をマージすることでラプラシアンに相当する項が流速の対角成分に現れたが , その項の影響を調べるためのものである . 領域の中心点を通る水平方線上について垂直方向の流速を比べ , Ghia らの解[7]と比べ , どれだけ解がなまっているか調べた .

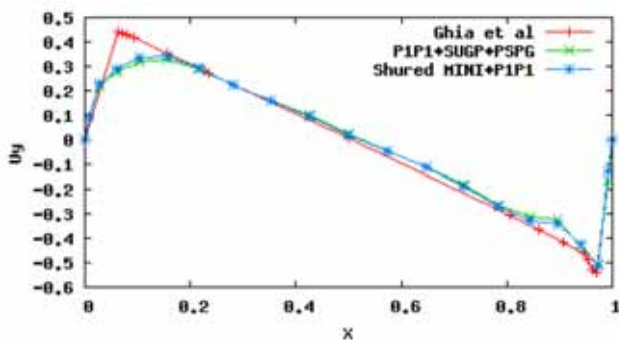


図 6 . 中心軸を通る水平線上の流速場

図 6 . のように SUPG-PSPG 安定化の流速場と MINI 要素の重心自由度を消去した行列に PIP1 補間による行列を足した方程式から得られる流速場はほぼ等しくなった . MINI 要素の重心自由度を消去した行列に PIP1 補間による行列を足したマトリクス方程式には SUPG 相当の行列に加えラプラシアン項が現れるがそれによって過剰な数値粘性が加わることはないといえる .

次に安定化の導入による数値減衰がどの程度のものかを調べるための標準的な問題である Standing Vortex 問題[8]について MINI 要素の重心点を消去したもの , MINI 要素の重心点を消去した方程式に PIP1 補間によって得られる方程式をマージしたものの PIP1 補間に SUPG_PSPG 安定化を加えた方程式を比較した . Standing Vortex 問題とは , 初期条件として人工的な渦を与えその時間変化を計算する問題である . 数値減衰の大きさは領域全体の運動エネルギーの時間変化を調べることで評価する . 流体には非粘性流れを仮定しており , 厳密解は初期条件そのままである . 初期条件は領域の中心からの局座標 $\{r, \theta\}$ によって , 次式にて表される .

$$u_r = 0 , \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases}$$

解析領域は 1×1 であり , 20×20 の均等なメッシュ分割を用いている . $t = 0.05$ として 3 秒後まで解析を行った .

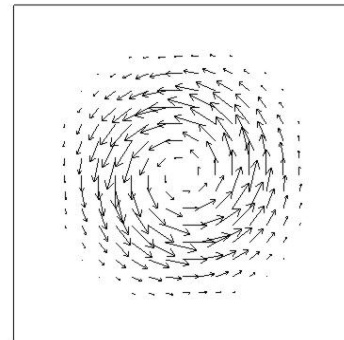


図 7 . 初期状態の渦

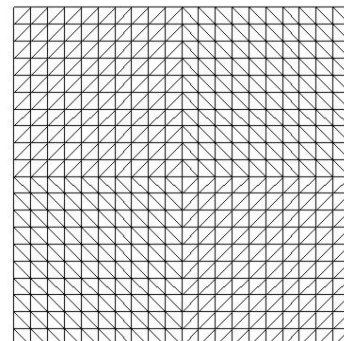


図 8 . メッシュ分割図

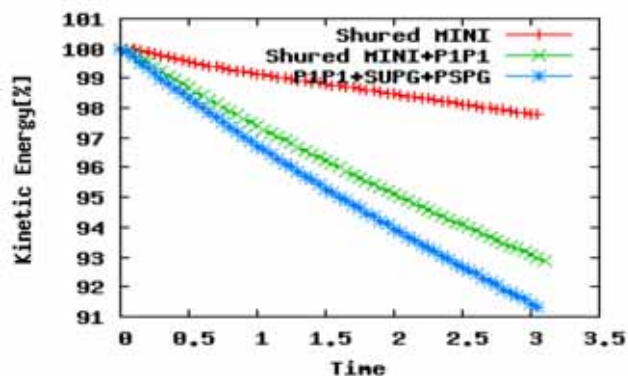


図9 . Standing Vortex 問題に対するエネルギー減衰

Standing Vortex 問題における，運動エネルギーが時間とともに減衰する様子を図9に示す．MINI要素の重心自由度を消去した解は，MINI要素の重心自由度を消去した方程式にPIP1要素をマージした解や，PIP1要素にSUPG，PSPG安定化を加えた解に比べてエネルギー減衰が少ないことがわかる．

MINI要素を用いてこの問題を解いた場合，重心自由度に大きな不安定性が生じる．この様子を図7.8に示す．図7.8はそれぞれ0.5秒後のcorner節点の流速ベクトルと重心点での流速ベクトルである．図10のようにcorner節点は初期状態の流速をほぼ保っているが，図11のように重心節点では流速の値が乱れている．この重心節点の流速の乱れが後にcorner節点にも影響する．一方，MINI要素の重心自由度を消去したとき，重心節点の値を0からの増分とすることで重心節点がcorner節点に影響を与えないようにした．このことが，本手法において，重心自由度を消去したときに安定した解が得られる主が要因であると考えられる．

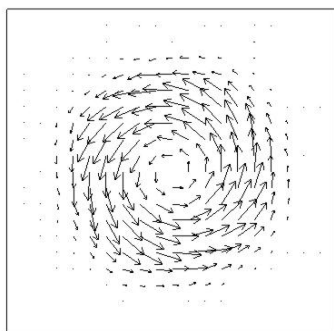


図10 . MINI要素，corner 節点での流速ベクトル

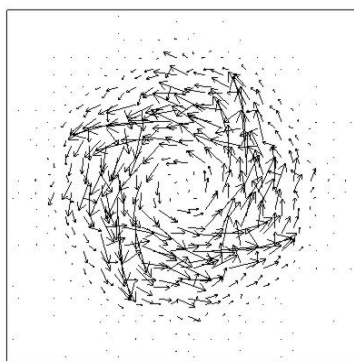


図11 . MINI要素，重心節点での流速ベクトル

まとめ

MINI要素と安定化有限要素法の関係について詳細に議論した．MINI要素の重心自由度を消去した方程式にPIP1補間によって得られる行列をマージ方程式がSUPG-PSPG法による安定化有限要素法とつながりがあることがわかった．またMINI要素が不安定となる原因についても考察できた．

以上の方法は流体の安定化のみにとどまらず，制約条件を持つ問題への一般化が可能である．その一例として非圧縮性超弾性体への適応が考えられる．今後は非圧縮性超弾性体について同次補間により，圧力，変位とも安定した解析ができるような方法を開発する予定である．

謝辞

本研究を進めるにあたって，久田俊明教授，JST 研究員 鷲尾巧氏，私の先輩で博士課程の澤田有弘氏には始終暖かい助言と励ましをいただきました．ここに感謝の意を表します．

参考文献

- [1] Brezzi, F., Bristeau, M.O., Franca, L.P., Mallet, M. and Roge, G., *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 96, pp.117-129, 1992
- [2] Yamada, T. *Finite Elements in Fluid*, Vol.9, pp.15767-1576, 1995.
- [3] Simo, J.C., Armero, F. and Taylor, C., *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol.38, pp.1475-1506.
- [4] 奥村弘，川原睦人，第14回数値流体力学シンポジウム，14,E06-3,2000.
- [5] 松本純一，*応用力学論文集* Vol.7, pp.339-346.
- [6] 山田貴博：構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，19,445-450, 1995
- [7] Ghia U., Ghia K.N. and Shin C.T. (1982), *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387-411
- [8] T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95 (1992) 221-242.